Algèbre linéaire

STA101 TD3

2023-2024

Exercice 1

1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont libres.
2. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces 3 vecteurs?
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$
4. Pour quelles valeurs de a, les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils liés?

Exercice 2

On rappelle que la covariance empirique $s_{X,Y}$ entre deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est donnée par

$$s_{X,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{1}$$

1. Montrer que la covariance empirique entre deux variables centrées définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$
2. En déduire que le coefficient de corrélation est compris entre -1 et 1

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer (si elles existent) A+C, AC, CA, AB, A', B'
2. Vérifier que $(BA)' = A'B'$

Exercice 4

1. Rappeler la définition de la trace d'une matrice.
2. Soient A une matrice de dimensions $(p \times q)$ et B une matrice de dimensions $(q \times p)$ et $C = AB$ et $D = BA$. Montrer que trace(C) = trace(D).
3. Application numérique : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

   Calculer la trace des produits
4. Soit P une matrice inversible $p \times p$ et A une matrice $p \times p$. Que vaut la trace de la matrice $P^{-1}AP$?

Exercice 5

1. Vérifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont deux matrices orthogonales

2. Soit C une matrice orthogonale, montrer que $|det(C)| = 1$
   Indication : on pourra commencer par calculer le déterminant du produit CC'

Exercice 6

Calculer le déterminant des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$