Algèbre linéaire (partie 2)

Vincent Audigier
vincent.audigier@lecnam.net

CNAM, Paris

STA101 2019-2020

Introduction

Sur l'ensemble des réels, il est fréquent de s'intéresser à des fonctions.

Les plus simples sont les fonctions linéaires, i.e. celles vérifiant $f(kx + c) = kf(x) + c$.

On peut aussi construire des fonctions linéaires sur un espace vectoriel.

La manipulation de ces fonctions repose sur les outils de calcul matriciel.

Définition

On appelle **matrice** A un tableau de nombre. Si le tableau A à n lignes et p colonnes, on dit que la matrice est de dimensions $n \times p$ (on note $A_{n \times p}$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Opérations

Comme sur les réels, il est possible d'effectuer des opérations entre matrices

Néanmoins, toutes les opérations valables sur les réels (addition, multiplication, inversion) ne sont pas toujours possibles pour toutes les matrices

En particulier, il faut faire attention aux dimensions.

Addition

Soient $A_{n\times p}$ et $B_{n\times p}$ deux matrices de mêmes dimensions. On définit la somme de A et B selon

$$
\begin{aligned}
A+B &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{n\times p} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1J} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iJ} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pJ} \end{pmatrix}}_{n\times p} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{ip}+b_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}}_{n\times p} \\
&= B+A
\end{aligned}
$$

Multiplication par un scalaire

Soit $A_{n \times p}$ une matrice et k un scalaire (un élément de $\mathbb{R}$), alors

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1j} & \dots & ka_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ ka_{n1} & \dots & ka_{nj} & \dots & ka_{np} \end{pmatrix}$$

On peut aussi définir une combinaison linéaire de deux ou plusieurs matrices

Multiplication par un vecteur

Soient A une matrice $n \times p$ et e un vecteur colonne de dimension p.

On définit le produit de A par e selon

$$Ae = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{n \times p} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e_p \end{pmatrix}}_{p \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_{1j} e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj} e_j \end{pmatrix}}_{n \times 1}$$

Produit matriciel

Soient $A_{n\times p}$ et $B_{p\times J}$ deux matrices. On définit le produit de A par B selon

$$
\begin{aligned}
AB &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}}_{n\times p} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1J} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iJ} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pJ} \end{pmatrix}}_{p\times J} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{p} a_{1\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{1\ell}b_{\ell j} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{1\ell}b_{\ell J} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell j} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{i\ell}b_{\ell J} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{p} a_{n\ell}b_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{n\ell}b_{\ell j} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} a_{n\ell}b_{\ell J} \end{pmatrix}}_{n\times J}
\end{aligned}
$$

Définitions

- Une matrice est dite **carrée** si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes

$$\text{Ex : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

- Une matrice A carrée est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tous couples (i, j) tels que $i \neq j$

- La matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$ pour tous i est appelée matrice **identité** et notée I

- On appelle **transposée** d'une matrice A, la matrice A' telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

Définitions

- Une matrice est dite **carrée** si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes

- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

  $$\text{Ex : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Une matrice A carrée est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tous couples (i, j) tels que $i \neq j$

- La matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$ pour tous i est appelée matrice **identité** et notée I

- On appelle **transposée** d'une matrice A, la matrice A' telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

Définitions

- Une matrice est dite **carrée** si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes
- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)
- Une matrice A carrée est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tous couples (i, j) tels que $i \neq j$

  Ex : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- La matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$ pour tous i est appelée matrice **identité** et notée I
- On appelle **transposée** d'une matrice A, la matrice A' telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

Définitions

- Une matrice est dite **carrée** si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes
- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)
- Une matrice A carrée est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tous couples (i, j) tels que $i \neq j$
- La matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$ pour tous i est appelée matrice **identité** et notée I

  $$\text{Ex : } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On appelle **transposée** d'une matrice A, la matrice A' telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

Définitions

- Une matrice est dite **carrée** si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes

- Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$ est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

- Une matrice A carrée est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tous couples (i, j) tels que $i \neq j$

- La matrice diagonale telle que $a_{ii} = 1$ pour tous i est appelée matrice **identité** et notée I

- On appelle **transposée** d'une matrice A, la matrice A' telle que $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tous couples (i, j)

  Ex : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Rang d'une matrice

- Le **rang** d'une matrice est le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) linéairement indépendantes
- Le rang est toujours inférieur ou égal au minimum du nombre de lignes et de colonnes de la matrice
- Si le rang de la matrice est égal au minimum du nombre de lignes et du nombre de colonnes, alors la matrice est dite de **plein rang** ou de rang maximal
- Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, donc de rang maximal

Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice A est la somme de ses éléments diagonaux (on note Tr(A) ou Trace(A))

On a les propriétés suivantes :

- $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
  Ex : $Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 0$
  $Tr\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + Tr\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 5 - 5 = 0$

- $Tr(AB) \neq Tr(A) \times Tr(B)$ mais $Tr(AB) = Tr(BA)$
  Ex : $Tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -10 \end{pmatrix} = -5$
  $Tr\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} Tr\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = 5 \times -5 = -25$
  $Tr\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = Tr\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & -10 \end{pmatrix} = -5$

Matrice inversible

Une matrice **carrée** est dite **inversible** s'il existe une matrice A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Les matrices carrées de plein rang sont inversibles.

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car si on considère $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a bien $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée $A_{n \times n}$ est noté $|A|$ ou $det(A)$. Il vaut A si $n = 1$, sinon

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

où i est l'indice d'une ligne et $|A_{ij}|$ est le mineur de a_{ij}. Le mineur est le déterminant de la matrice A dont on a ôté la ligne i et la colonne j.

Ex :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = a|d| - b|c| = ad - bc$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad |A| = det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times 2 - det\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \times 7$$

$$+det\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times 6 = -360$$

Propriétés

A une matrice carrée de dimensions $n \times n$

$$
\begin{aligned}
det(A') &= det(A) \\
det(AB) &= det(A)det(B) \\
det(kA) &= k^n det(A)
\end{aligned}
$$

Si une matrice n'est pas de plein rang, alors son déterminant est nul et réciproquement

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Matrice orthogonale

Une matrice A est dite **orthogonale** si son inverse est égale à sa transposée

$$A^{-1} = A'$$