Algèbre linéaire (partie 1)

Vincent Audigier
vincent.audigier@lecnam.net

CNAM, Paris

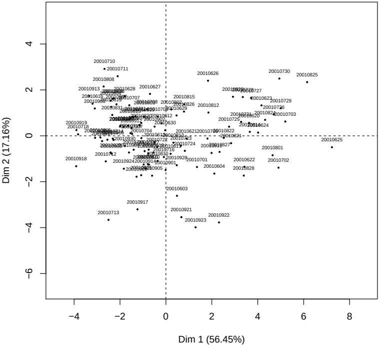
STA101 2019-2020

Introduction

- Les méthodes d'analyse univariées et bivariées sont indispensables dans le processus de dépouillement
- Mais insuffisantes pour donner une vision multidimensionnelles
- On utilise pour cela les méthodes d'analyse factorielle (e.g. ACP, AFC, ACM)

Principe de base des méthodes d'analyse factorielle

- représenter les données sous la forme d'un nuage dans un espace multidimensionnel
- analyser les projections de ce nuage sur des espaces plus petits



Méthodes géométriques utilisées à des fins statistiques

Plan

Vecteurs

- Un élément de $\mathbb{R}^p$ est une suite finie de taille p d'éléments de $\mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}$).
- Cette suite est appelée **vecteur**
- On parle de **vecteur ligne** (resp. colonne) si la suite est disposée en ligne (resp. colonne)
- Exemples : $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne

  $v' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur ligne
- Transformer un vecteur ligne en vecteur colonne (et vice et versa) s'appelle la **transposition**, notée $.'$, $.^\top$ ou $t(.)$

Espace vectoriel

- Un espace vectoriel est un ensemble dans lequel on peut effectuer différentes opérations telles que l'addition et la multiplication
- Par exemple, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, de dimension 1
- Ces opérations, bien connues pour $\mathbb{R}$, peuvent être généralisées à $\mathbb{R}^p$

Addition

- Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ deux vecteurs de **mêmes dimensions**
- alors $a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_p + b_p \end{pmatrix}$

Multiplication par un scalaire

- Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ un vecteur de dimension p et k un scalaire (un élément de $\mathbb{R}$)
- alors $k \times a = \begin{pmatrix} k \times a_1 \\ \vdots \\ k \times a_p \end{pmatrix}$

Combinaison linéaire

- Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, k_1 et k_2 deux scalaires
- alors

$$k_1 a + k_2 b = k_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_1 + k_2 b_1 \\ \vdots \\ k_1 a_p + k_2 b_p \end{pmatrix}$$

Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble non vide E d'un espace vectoriel V est un **sous-espace vectoriel** si pour tous éléments v_1 et v_2 de E :

- $v_1 + v_2 \in E$
- $kv_1 \in E$ pour tout scalaire k

Famille libre

- On appelle **famille**, un ensemble d'éléments d'un espace vectoriel $\{v_1, v_2, \ldots, v_J\}$
- Une famille est dite **libre** si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille

$$k_1 v_1 + \ldots + k_J v_J = 0$$

  implique la nullité des coefficients $k_1, \ldots, k_J$
- On dit aussi que les vecteurs $\{v_1, v_2, \ldots, v_J\}$ sont linéairement indépendants
- Ceci traduit qu'aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres

Famille génératrice

- Si un vecteur e est combinaison linéaire d'un ensemble de vecteurs $\{e_1, \ldots, e_J\}$ alors, on dit que e est **engendré** par $\{e_1, \ldots, e_J\}$
- On appelle **famille génératrice** d'un sous espace-vectoriel E une famille d'éléments $\{e_1, \ldots, e_J\}$ de E telle que tout élément e de E peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
- Autrement dit, c'est l'ensemble des vecteurs engendrés par la famille : pour tout $e \in E$, il existe $k_1, \ldots, k_J$ scalaires tels que
$$k_1 e_1 + \ldots + k_J e_J = e$$

Base

- On appelle **base** d'un sous-espace vectoriel E, une **famille libre et génératrice** de E
- Autrement dit, n'importe quel vecteur $e \in E$ peut s'exprimer de façon unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $\{e_1, \ldots, e_J\}$ de la base.
- La **base canonique** de $\mathbb{R}^p$ est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimensions d'un sous-espace

- La **dimension** d'un sous-espace E est le plus petit nombre de vecteurs nécessaire pour former une famille génératrice de E
- Elle correspond à la taille de toute base de E
- Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$ qui contient 2 éléments

Plan

Espace Euclidien

On appelle **espace Euclidien**, un espace vectoriel muni d'un **produit scalaire** définissant une **distance** entre les vecteurs

Produit scalaire

Un produit scalaire est une fonction f de $E \times E \to \mathbb{R}$

- bilinéaire

$$\begin{aligned} f(ke_1, e_2) &= kf(e_1, e_2) = f(e_1, ke_2) \\ f(e_1 + e_2, e_3) &= f(e_1, e_3) + f(e_2, e_3) \\ f(e_1, e_2 + e_3) &= f(e_1, e_2) + f(e_1, e_3) \end{aligned}$$

- symétrique

$$f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1)$$

- définie

$$f(e, e) = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

- positive

$$f(e, e) \geq 0 \text{ pour } e \neq 0$$

On la note $< ., . >$, Ex : $E = \mathbb{R}^p$, $< a, b >= \sum_{j=1}^{p} a_j b_j$

Norme et distance

Le produit scalaire permet de définir la **norme** de tout élément de l'espace E

$$\| e \| = \sqrt{< e, e >}$$

Ainsi qu'une **distance** entre différents éléments

$$d(e_1, e_2) = \| e_1 - e_2 \|$$

Exemple : $E = \mathbb{R}^p$, $< a, b > = \sum_{j=1}^{p} a_j b_j$

$\| a \| = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} a_j^2}$

$d(a, b) = \| a - b \| = \sqrt{< a - b, a - b >} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (a_j - b_j)^2}$

Propriétés

- Inégalité triangulaire

$$\| e_1 + e_2 \| \leq \| e_1 \| + \| e_2 \|$$

- Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$| < e_1 , e_2 > | \leq \| e_1 \| \| e_2 \|$$

Orthogonalité

Deux vecteurs e_1 et e_2 (non nuls) sont dits **orthogonaux** si leur **produit scalaire est nul**

Théorème de **Pythagore** : si deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux, alors

$$\| e_1 + e_2 \|^2 = \| e_1 \|^2 + \| e_2 \|^2$$

La **projection orthogonale** d'un vecteur e_1 sur un vecteur e_2 est une fonction est définie par

$$p_{e_2}(e_1) = \frac{< e_1, e_2 > e_2}{\| e_2 \|^2}$$

On a toujours

$$\| p_{e_2}(e_1) \|^2 \leq \| e_1 \|^2$$

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Un **vecteur** e est **orthogonal** à un sous espace vectoriel V si il est orthogonal à tous les vecteurs de V. On note

$$e \perp V$$

Deux **sous-espaces** V et W sont dits **orthogonaux**, si tout vecteur de V est orthogonal à W

L'**ensemble** de tous les vecteurs orthogonaux à V est appelé **orthogonal** de V et noté

$$V^{\perp}$$