

Algèbre linéaire (partie 1)

Vincent Audigier

CNAM, Paris

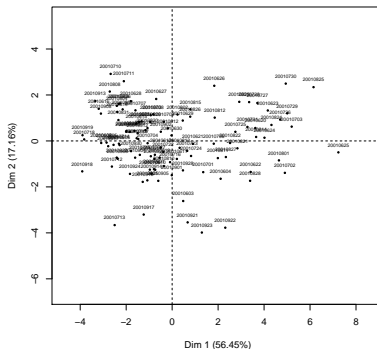
STA101

Introduction

- ▶ Les méthodes d'analyse univariées et bivariées sont indispensables dans le processus de dépouillement
- ▶ Mais insuffisantes pour donner une vision multidimensionnelles
- ▶ On utilise pour cela les méthodes d'analyse factorielle (e.g. ACP, AFC, ACM, AFDM)

Principe de base des méthodes d'analyse factorielle

- ▶ représenter les données sous la forme d'un nuage dans un espace multidimensionnel
- ▶ analyser les projections de ce nuage sur des espaces plus petits



Méthodes géométriques utilisées à des fins statistiques

Plan

Introduction

Espaces vectoriels

- Vecteurs

- Opérations

- Sous-espace vectoriel

- Base d'un espace

Espaces Euclidiens

- Produit scalaire

- Norme, distance

- Propriétés

- Orthogonalité et projection

Vecteurs

- ▶ Un élément de \mathbb{R}^p est une suite finie de taille p d'éléments de \mathbb{R} ($p \in \mathbb{N}$).
- ▶ Cette suite est appelée **vecteur**
- ▶ On parle de **vecteur ligne** (resp. colonne) si la suite est disposée en ligne (resp. colonne)
- ▶ Exemples : $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne
 $v' = (3 \ 0)$ est un vecteur ligne
- ▶ Transformer un vecteur ligne en vecteur colonne (et vice et versa) s'appelle la **transposition**, notée $.$, $.$ ^T ou $t(.)$

Espace vectoriel

- ▶ Un espace vectoriel est un ensemble dans lequel on peut effectuer différentes opérations telles que l'addition et la multiplication
- ▶ Par exemple, \mathbb{R} est un espace vectoriel, de dimension 1
- ▶ Ces opérations, bien connues pour \mathbb{R} , peuvent être généralisées à \mathbb{R}^p

Addition

► Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ deux vecteurs de

mêmes dimensions

► alors $a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_p + b_p \end{pmatrix}$

Multiplication par un scalaire

- ▶ Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ un vecteur de dimension p et k un scalaire (un élément de \mathbb{R})
- ▶ alors $k \times a = \begin{pmatrix} k \times a_1 \\ \vdots \\ k \times a_p \end{pmatrix}$

Combinaison linéaire

► Soit $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$, k_1 et k_2 deux scalaires

► alors

$$k_1 a + k_2 b = k_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 a_1 + k_2 b_1 \\ \vdots \\ k_1 a_p + k_2 b_p \end{pmatrix}$$

Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble non vide E d'un espace vectoriel V est un **sous-espace vectoriel** si pour tous éléments v_1 et v_2 de E :

- ▶ $v_1 + v_2 \in E$
- ▶ $kv_1 \in E$ pour tout scalaire k

Exemple : $V = \mathbb{R}^2$, $E = \mathbb{R}$

Famille libre

- ▶ On appelle **famille**, un ensemble d'éléments d'un espace vectoriel $\{v_1, v_2, \dots, v_J\}$
- ▶ Une famille est dite **libre** si toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille

$$k_1 v_1 + \dots + k_J v_J = 0$$

implique la nullité des coefficients k_1, \dots, k_J

- ▶ On dit aussi que les vecteurs $\{v_1, v_2, \dots, v_J\}$ sont linéairement indépendants
- ▶ Ceci traduit qu'aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres

Famille génératrice

- ▶ Si un vecteur e est combinaison linéaire d'un ensemble de vecteurs $\{e_1, \dots, e_J\}$ alors, on dit que e est **engendré** par $\{e_1, \dots, e_J\}$
- ▶ On appelle **famille génératrice** d'un sous espace-vectoriel E une famille d'éléments $\{e_1, \dots, e_J\}$ de E telle que tout élément e de E peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
- ▶ Autrement dit, l'espace vectoriel est l'ensemble des vecteurs engendrés par la famille : pour tout $e \in E$, il existe k_1, \dots, k_J scalaires tels que

$$k_1 e_1 + \dots + k_J e_J = e$$

Base

- ▶ On appelle **base** d'un sous-espace vectoriel E , une **famille libre et génératrice** de E
- ▶ Autrement dit, n'importe quel vecteur $e \in E$ peut s'exprimer de façon unique comme une combinaison linéaire des vecteurs $\{e_1, \dots, e_J\}$ de la base.
- ▶ La **base canonique** de \mathbb{R}^p est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimension d'un sous-espace

- ▶ La **dimension** d'un sous-espace E est le plus petit nombre de vecteurs nécessaire pour former une famille génératrice de E
- ▶ Elle correspond à la taille de toute base de E
- ▶ Par exemple, \mathbb{R}^2 est de dimension 2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille libre et génératrice de \mathbb{R}^2 qui contient 2 éléments

Plan

Introduction

Espaces vectoriels

- Vecteurs

- Opérations

- Sous-espace vectoriel

- Base d'un espace

Espaces Euclidiens

- Produit scalaire

- Norme, distance

- Propriétés

- Orthogonalité et projection

Espace Euclidien

On appelle **espace Euclidien**, un espace vectoriel muni d'un **produit scalaire** définissant une **distance** entre les vecteurs

Produit scalaire

Un produit scalaire est une fonction f de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

► bilinéaire

$$f(ke_1, e_2) = kf(e_1, e_2) = f(e_1, ke_2)$$

$$f(e_1 + e_2, e_3) = f(e_1, e_3) + f(e_2, e_3)$$

$$f(e_1, e_2 + e_3) = f(e_1, e_2) + f(e_1, e_3)$$

► symétrique

$$f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1)$$

► définie

$$f(e, e) = 0 \Leftrightarrow e = 0$$

► positive

$$f(e, e) \geq 0 \text{ pour } e \neq 0$$

On la note $\langle ., . \rangle$, Ex : $E = \mathbb{R}^p$, $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^p a_j b_j$

Norme et distance

Le produit scalaire permet de définir la **norme** de tout élément de l'espace E

$$\| e \| = \sqrt{\langle e, e \rangle}$$

Ainsi qu'une **distance** entre différents éléments

$$d(e_1, e_2) = \| e_1 - e_2 \|$$

Exemple : $E = \mathbb{R}^p$, $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^p a_j b_j$

$$\| a \| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^p a_j^2}$$

$$d(a, b) = \| a - b \| = \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^p (a_j - b_j)^2}$$

Propriétés

- ▶ Inégalité triangulaire

$$\| \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \| \leq \| \mathbf{e}_1 \| + \| \mathbf{e}_2 \|$$

- ▶ Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$| \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle | \leq \| \mathbf{e}_1 \| \| \mathbf{e}_2 \|$$

Orthogonalité

Deux vecteurs e_1 et e_2 (non nuls) sont dits **orthogonaux** si leur **produit scalaire est nul**

Théorème de **Pythagore** : si deux vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux, alors

$$\| e_1 + e_2 \|^2 = \| e_1 \|^2 + \| e_2 \|^2$$

La **projection orthogonale** d'un vecteur e_1 sur un vecteur e_2 est une fonction définie par

$$p_{e_2}(e_1) = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle e_2}{\| e_2 \|^2}$$

On a toujours

$$\| p_{e_2}(e_1) \|^2 \leq \| e_1 \|^2$$

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Un **vecteur** e est **orthogonal** à un sous espace vectoriel V s'il est orthogonal à tous les vecteurs de V . On note

$$e \perp V$$

Deux **sous-espaces** V et W sont dits **orthogonaux**, si tout vecteur de V est orthogonal à W

L'**ensemble** de tous les vecteurs orthogonaux à V est appelé **orthogonal** de V et noté

$$V^\perp$$